DÃY SỐ

Giáo viên: **Nguyễn Tiến Đạt**

A. Lý thuyết

1). Dãy số: Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương N* được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là là dãy số). Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số, $u(1)$ được gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), $u(2)$ được gọi là số hạng thứ hai… Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1), u(2)$ …tương ứng bởi $u_1, u_2,$,…

2).Người ta thường kí hiệu dãy số là (u_n) và gọi u_n là số hạng tổng quát của dãy số đó. Người ta cũng thường viết dãy số (u_n) dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, ..., u_n, ...$

3). Các cách cho một dãy số:

Cách 1: Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ: Cho dãy (u_n) với $u_n = 2n^2 - 3n + 2$

Cách 2: Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

Cách 3: Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) bán kính R. Cho dãy (u_n) với u_n là độ dài cung tròn có số đo là $\frac{2\pi}{n}$ của đường tròn (O).

4). **Dãy số tăng:** (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n < u_{n+1.}$ (Số sau to hơn số trước)

5). **Dãy số giảm:** (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n > u_{n+1.}$ (Số sau nhỏ hơn số trước)

6). Sự tăng giảm gọi là tính đơn điệu.

7). **Dãy số bị chặn trên:** (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in N^*, u_n \leq M$.

8). **Dãy số bị chặn dưới:** (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $\forall n \in N^*, u_n \geq m$.

9). **Dãy số bị chặn:** (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới. Nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in N^*, m \leq u_n \leq M$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1:

Tính tăng, giảm của dãy số.

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Xét dấu của biểu thức $u_{n+1} - u_n$

. Nếu $\forall n \in N^*, u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng;

. Nếu $\forall n \in N^*, u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $\forall n \in N^*, u_n > 0$ thì có thể so sánh $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1

. Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng;

. Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n$ (hoặc $u_{n+1} < u_n$)

Chú ý:

. Nếu $\exists k \in N^*: u_{k+1} > u_k$ thì dãy số (u_n) không giảm.

. Nếu $\exists k \in N^*: u_{k+1} < u_k$ thì dãy số (u_n) không tăng.

Cách 4: Sử dụng Casio, Vinacal – Chức năng: TABLE MODE 7 để nhìn ra tính tăng giảm của nó.

Dãy số nào trong các dãy số sau là dãy số không tăng không giảm?

A. $u_n = (-1)^n \left(2^n + 1\right)$.

B. $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

C. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

D. $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải: Chọn A

Với $u_n = (-1)^n\left(2^n + 1\right)$

Ta có $u_1 = -3, u_2 = 5, u_3 = -9$, từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy không tăng không giảm.

Dãy số nào trong các dãy số sau là dãy số tăng?

A. $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$.

B. $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$.

C. $u_n = 3^n - n$..

D. $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

Hướng dẫn giải: Chọn C

Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n.$

Với mỗi $n \in N^*$, ta có:

$u_{n+1} - u_n = \left[3^{n+1} - (n+1)\right] - \left(3^n - n\right).$

$= 3.3^n - n - 1 - 3^n + n$

$= 2.3^n + 3^n - 3^n - 1 = 2.3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \geq 1.$)

Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

Dãy số nào trong các dãy số sau là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$.

B. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$.

C. $\mathrm{u_n} = \dfrac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}+1}$.

D. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$.

Hướng dẫn giải: Chọn B

Dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

Ta có: $u_n = \dfrac{(n+1)-1}{n\left(\sqrt{n+1}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Dễ dàng ta có: $\sqrt{(n+1)+1}+1 > \sqrt{n+1}+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)+1}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1} \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$. Vậy dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

Vấn đề 2: Thiết lập công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n

PHƯƠNG PHÁP:

. Nếu u_n có dạng $u_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + ... + a_n$ (kí hiệu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$) thì biến đổi a_k thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn u_n .

. Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi, tính vài số hạng đầu của dãy số (chẳng hạn tính $u_1, u_2, ...$), từ đó dự đoán công thức tính u_n theo n. Ngoài ra cũng có thể tính hiệu $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó để tìm công thức tính u_n theo n.

Cho dãy số (Un) với $Un = \frac{-n}{n+1}$.Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Năm số hạng đầu của dãy là : $\frac{-1}{2};\frac{-2}{3};\frac{-3}{4};\frac{-5}{5};\frac{-5}{6}$.

B. 5 số số hạng đầu của dãy là : $\frac{-1}{2};\frac{-2}{3};\frac{-3}{4};\frac{-4}{5};\frac{-5}{6}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Bị chặn trên bởi số 1.

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Thay n lần lượt bằng $1,2,3,4,5$ ta được 5 số hạng đầu tiên là $\frac{-1}{2};\frac{-2}{3};\frac{-3}{4};\frac{-4}{5};\frac{-5}{6}$.

Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này :

A. $u_n = n^{n-1}$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n+1}$.

D. $u_n = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ ... \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$. Nhân hai vế ta được

$$u_1.u_2.u_3...u_n = 2.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$$

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{a-1}{n^2}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Dãy số có $u_{n+1} = \frac{a-1}{n^2+1}$.

B. Dãy số có : $u_{n+1} = \frac{a-1}{(n+1)^2}$.

C. Là dãy số tăng.

D. Là dãy số tăng.

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{a-1}{(n+1)^2}$.

Cho dãy số có các số hạng đầu là: $5;10;15;20;25;...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = 5(n-1)$.

B. $u_n = 5n$.

C. $u_n = 5+n$.

D. $u_n = 5.n+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Ta có:

$5 = 5.1$

$10 = 5.2$

$15 = 5.3$

$20 = 5.4$

$25 = 5.5$

Suy ra số hạng tổng quát $u_n = 5n$.

Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

A. $u_n = 2n + 1$

B. $u_n = n + 2$

C. $u_n = -n + 4$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải: Chọn A

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

Ta có:

$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$ $\qquad$ $u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$

$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$ $\qquad$ $u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n = 2n + 1 \quad \forall n \geq 1 (*)$

Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n . \end{cases}$

A. $u_n = 2^{n+1}$.

B. $u_n = 1 + 2^n$.

C. $u_n = 2^n$

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn C

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$$

Ta có:

$u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 = 2^2$ $\quad$ $u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 = 2^3$

$u_4 = 2u_3 = 2.8 = 16 = 2^4$ $\quad$ $u_5 = 2u_4 = 2.16 = 32 = 2^5$

Từ các số hạng đầu tiên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 2^n \forall n \geq 1 (*)$

Dãy số (u_n) được xác định bằng công thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases}$ $\forall n \geq 1$. Tính số hạng thứ 100 của dãy số ?

A. 132143432. **B**. 76661312.

C. 191213214. **D**. 24502501.

Hướng dẫn giải: Chọn D

Ta có: $u_{n+1} = u_n + n^3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n^3$.

Từ đó suy ra:

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

$u_4 - u_3 = 3^3$

....

$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3 \rightarrow u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$$u_1 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \ldots + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1}$$

$$= 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-2)^3 + (n-1)^3$$

$$\Leftrightarrow u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-2)^3 + (n-1)^3.$$

VẤN ĐỀ 3: Dãy số bị chặn.

PHƯƠNG PHÁP

1). Nếu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ thì:

. Thu gọn u_n , dựa vào biểu thức thu gọn để chặn u_n.

.Ta cũng có thể chặn tổng $\sum_{k=1}^{n} a_k$ bằng một tổng mà ta có thể biết được chặn trên, chặn dưới của nó.

2). Nếu dãy số (u_n) cho bởi một hệ thức truy hồi thì:

.Dự đoán chặn trên, chặn dưới rồi chứng minh bằng phương pháp chứng minh quy nạp.

.Ta cũng có thể xét tính đơn điệu (nếu có) sau đó giải bất phương trình $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó chặn (u_n).

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{-1}{n}$.Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Năm số hạng đầu của dãy là : $-1; \frac{-1}{2}; \frac{-1}{3}; \frac{-1}{4}; \frac{-1}{5}$.

B. Bị chặn trên bởi số $M = -1$.

C. Bị chặn trên bởi số $M = 0$.

D. Là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi số m $M = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Nhận xét : $u_n = \dfrac{-1}{n} \geq \dfrac{-1}{1} = -1.$

Dãy số $\left(u_n\right)$ bị chặn dưới bởi $M = -1.$

Hàm số bị chặn trên hay chặn dưới và chặn bởi số nào: $u_n = \frac{2n-1}{n+3}; n \in N^*$

A. Chặn trên bởi 2

B. Chặn trên với -3

C. Chặn dưới bởi 0,25

D. Chặn dưới bới -2

LỜI GIẢI

Ta có:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n+1}{n+4}-\frac{2n-1}{n+3}=\frac{2n^2+7n+3-2n^2-7n+4}{(n+4)(n+3)}$$

$$=\frac{7}{(n+4)(n+3)}>0;\forall n\in N*$$

Vậy: (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n = \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \frac{7}{n+3}$, suy ra:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$ nên (u_n) bị chặn trên. Vì (u_n) là dãy số tăng $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{u}_1 = \frac{1}{4} \leq u_n$ Nên (u_n) bị chặn dưới. Vậy (u_n) bị chặn.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{-1}{n^2+1}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $u_{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)^2+1}$.

B. $u_n > u_{n+1}$.

C. Đây là một dãy số tăng.

D. Bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn B.