



GIỚI HẠN HÀM SỐ PHẦN 2

Giáo viên: Nguyễn Tiến Đạt

CÁCH KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$

(Dạng này thường gặp khi $x \rightarrow x_0$).

DẠNG 1: Hàm số $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó

$P(x), Q(x)$ là đa thức theo biến x .

PHƯƠNG PHÁP: Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn biểu thức làm cả tử và mẫu bằng 0.

Phân tích đa thức thành nhân tử có các phương pháp sau:

- Sử dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Nếu tam thức bậc hai thì sử dụng $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), (a \neq 0)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.
- Sử dụng phương pháp Hoocner . Phép chia đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ cho $(x - x_0)$ theo sơ đồ Hoocner (Thần chú :
« Đầu rơi, nhân ngang, cộng chéo »)

Ví dụ : Chia $4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$ cho $(x - 3)$

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}$

A. $\frac{2}{5}$.

B. -1 .

C. $\frac{12}{7}$.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn C

Ta có $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

(áp dụng hằng đẳng thức), và $x^2 + 11x + 18 = (x + 2)(x + 9)$ (với $x_1 = -2$ và $x_2 = -9$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 11x + 18 = 0$).

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x + 9)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 9} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$

Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$.

A. $\frac{11}{7}$.

B. 1.

C. 0.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn A

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$$

Thay $x = 3$ vào cả tử và mẫu thấy đều bằng 0, nên $x = 3$ là một nghiệm của hai đa thức cả mẫu và tử. Có nghĩa $(x - 3)$ là nhân tử chung, ta phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử bằng phương pháp Hoocner.

Cách làm như sau:

Phân tích tử số:

$$2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(2x^2 + x + 1)$$

	2	-5	-2	-3
3	2	1	1	0

Kẻ bảng như sau. Sau đó điền hệ số của từng số hạng với số mũ giảm dần vào các ô ở hàng đầu tiên với ô thứ nhất để trống. Ở

hàng thứ hai: điền giá trị làm đa thức bằng 0 ở đây là chữ số 3. Ô thứ hai điền lại giá trị ở ô thứ hai của hàng một xuống (ta thường hay nói “đầu rơi xuống”), sau đó lấy $3.2 + (-5) = 1$ điền chữ số 1 vào ô thứ ba, lấy $3.1 + (-2) = 1$ điền chữ số 1 vào ô thứ tư, cuối cùng lấy $3.1 + (-3) = 0$ điền vào ô cuối cùng.

Phân tích mẫu số:

$$4x^3 - 13x^2 + 4x - 3 = (x - 3)(4x^2 - x + 1)$$

	4	-13	4	-3
3	4	-1	1	0

Do đó

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(2x^2 + x + 1)}{(x - 3)(4x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 - x + 1} = \frac{11}{17}.$$

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{-1}{2}$.

C. 0.

D. 2.

Hướng dẫn giải: Chọn A

Bước đầu tiên ta phải quy đồng mẫu, sau đó phân tích đa thức của tử thành nhân tử và rút gọn hạng tử vô định

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

DẠNG 2: Hàm số $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$

là các biểu thức có chứa căn thức theo biến x.

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Nhân lượng liên hợp.

$$\bullet a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} \\ a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} \end{cases}$$

$$a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \end{cases}$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

$$a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} .$$

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$

$$= \frac{a - b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 - \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 - \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$

$$= \frac{a + b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 - \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{-1}{2}$.

C. 0.

D. 2.

Hướng dẫn giải: Chọn A

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

A. $\frac{1}{24}$.

B. 1.

C. $-\frac{1}{56}$

D. $+\infty$.

Hướng dẫn giải: Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2^2 - (x-3)}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{7 - x}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-1}{(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}.$$

Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}.$$

A. $-\frac{1}{3}.$

B. $+\infty.$

C. $0.$

D. $2.$

Hướng dẫn giải: Chọn A

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x + 6) - (x^2 + 2x - 6)}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6})} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải: Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-2^2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-3^2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{3}{2}.$$

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}$.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $+\infty$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn A

Ta có

$$\sqrt[3]{4x} - 2 = \frac{\left(\sqrt[3]{4x} - 2\right) \left[\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2 + 2.\sqrt[3]{4x} + 4 \right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2 + 2.\sqrt[3]{4x} + 4}_A}.$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^3 - 2^3}{A} = \frac{4x - 8}{A} = \frac{2(x - 2)}{A}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)}{(x - 2).A} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{A} = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{4.2}\right)^2 + 2.\sqrt[3]{4.2} + 4} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10 + 2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $+\infty$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn A

Ta có $\sqrt[3]{10+2x^3} + (x-1)$

$$= \frac{\left[\sqrt[3]{10+2x^3} + (x-1) \right] \left[\left(\sqrt[3]{10+2x^3} \right)^2 - \sqrt[3]{10+2x^3} \cdot (x-1) + (x-1)^2 \right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{10+2x^3} \right)^2 - \sqrt[3]{10+2x^3} \cdot (x-1) + (x-1)^2}_A}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{10+2x^3} \right)^3 + (x-1)^3}{A} = \frac{3x^3 - 3x^2 + 3x + 9}{A}$$

$$= \frac{3(x+1)(x^2 - 2x + 3)}{A}$$

$$\text{Và có } x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

Do đó

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10 + 2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x + 1)(x^2 - 2x + 3)}{(x + 1)(x + 2).A} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x + 2).A} = \frac{3.6}{12} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

DẠNG 3: Thêm bớt số hạng hoặc một biểu thức vắng để khử được dạng vô định:

Các dạng hay gặp $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[k]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} + c}{x - x_0}$

hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[k]{f(x)} + \sqrt[m]{g(x)} + c}{x - x_0}$ **hoặc**

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[k]{f(x)} + \sqrt[m]{g(x)} + c}{(x - x_0)^n}.$

Trong đó $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ và $n \leq \min(k, m)$.

PHƯƠNG PHÁP: Thông qua những ví dụ sau, rồi ta rút ra phương pháp giải:

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}$

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn A

Ta có khi $x \rightarrow 1$ thì $(\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5) \rightarrow 0$

do đó đây là bài dạng vô định $\frac{0}{0}$, ta phải tách

được về dạng $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - c}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{g(x)} - m}{x - 1}$ sao

cho mỗi giới hạn nhân lượng liên hợp đều khử được dạng vô định. Kỹ thuật ta thay

$x = 1$ vào $\sqrt{2x+2} = 2$ và $\sqrt{5x+4} = 3$ nên số (-5)

tách thành $(-2) + (-3)$ và gom lại như sau :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+2} - 2) + (\sqrt{5x+4} - 3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{x-1}. \text{ Sau đó tính}$$

từng giới hạn.

- Tính

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+2} - 2)(\sqrt{2x+2} + 2)}{(x-1)(\sqrt{2x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+2})^2 - 4}{(x-1)(\sqrt{2x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{2x+2} + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Tính

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5x+4} - 3)(\sqrt{5x+4} + 3)}{(x-1)(\sqrt{5x+4} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5x+4})^2 - 9}{(x-1)(\sqrt{5x+4} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x+4} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{\sqrt{5x+4} + 3} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Kết luận } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3}.$$

Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}$:

A. -1 .

B. $-\frac{5}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn A

$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}$. Ta dễ dàng thấy đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$ và tử số có hai căn thức khác loại, nên ta phải thêm bớt một hằng số c sao cho đưa được về dạng $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - c}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{c - \sqrt{g(x)}}{x-2}$ và mỗi giới hạn đều tính được giới hạn khi khử được dạng vô định bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Kỹ thuật 1: Thay $x = 2$ vào $\sqrt[3]{3x+2}$ và $\sqrt{5x-6}$ đều bằng 2. Suy ra 2 là giá trị ta cần thêm bớt.

Kỹ thuật 2: Cho $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ sau đó giải hệ
$$\begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} = 2 \\ \sqrt{5x-6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 = 8 \\ 5x-6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow c = 2 \text{ là}$$
 giá trị cần thêm bớt.

Cụ thể làm như sau:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(\sqrt[3]{3x+2} - 2\right) + \left(2 - \sqrt{5x-6}\right)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{5x-6}}{x-2}. \end{aligned}$$

Tính $L_1 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(\sqrt[3]{3x+2} - 2\right) \left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2 + 2.\sqrt[3]{3x+2} + 4 \right]}{(x-2) \underbrace{\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2 + 2.\sqrt[3]{3x+2} + 4 \right]}_A}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2).A} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{A} = \frac{1}{4}.$$

Tính

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{5x - 6}}{x - 2} = \frac{(2 - \sqrt{5x - 6})(2 + \sqrt{5x - 6})}{(x - 2)(2 + \sqrt{5x - 6})} \\ &= \frac{4 - (5x - 6)}{(x - 2)(2 + \sqrt{5x - 6})} \\ &= \frac{-5(x - 2)}{(x - 2)(2 + \sqrt{5x - 6})} = \frac{-5}{2 + \sqrt{5x - 6}} = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } L = L_1 + L_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1.$$

DẠNG 4: Các giới hạn đặc biệt

Nhắc lại:

$$\bullet \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_n = n$$

$$\bullet a^3 - b^3 = (a - b) \left(\underbrace{a^2 + ab + b^2}_{3 \text{ so hang}} \right)$$

$$\bullet a^n - b^n = (a - b) \left(\underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}}_{n \text{ so hang}} \right)$$

Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$

A. a .

B. $-\frac{2a}{n}$.

C. $\frac{a}{n}$.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải: Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt[n]{1+ax} \Rightarrow t^n = 1+ax \Rightarrow x = \frac{t^n - 1}{a}$$

Ta có khi $x \rightarrow 0$ thì $t \rightarrow 1$.

$$\text{Khi đó } L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(t-1)}{t^n - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(t-1)}{(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1} = \frac{a}{n}$$

$$\text{Vậy } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n}$$

Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

A. $\frac{49}{24}$.

B. $\frac{97}{48} + \infty$.

C. 2.041.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - x - x + 1}{x^{50} - x - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - x) - (x - 1)}{(x^{50} - x) - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{99} - 1) - (x - 1)}{x(x^{49} - 1) - (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - (x - 1)}{x(x - 1)(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{99} + x^{98} + \cdots + x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{99} + x^{98} + \cdots + x^2 + x - 1}{x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x - 1} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24} \end{aligned}$$